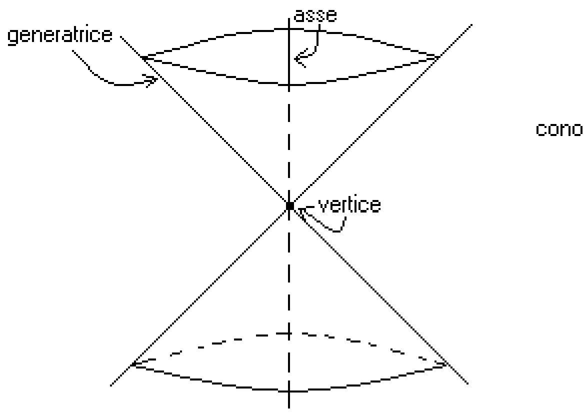
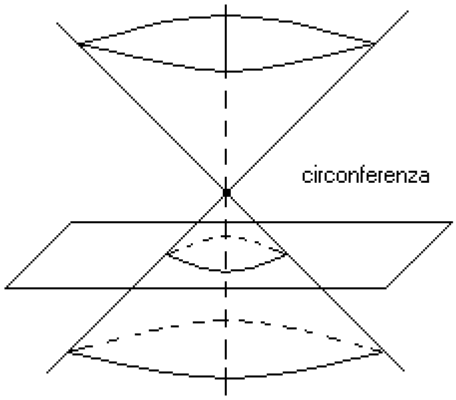
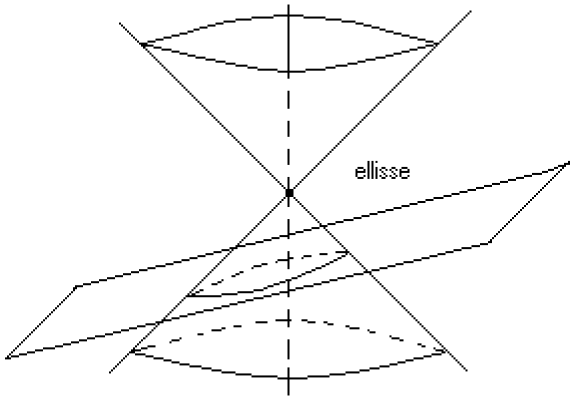
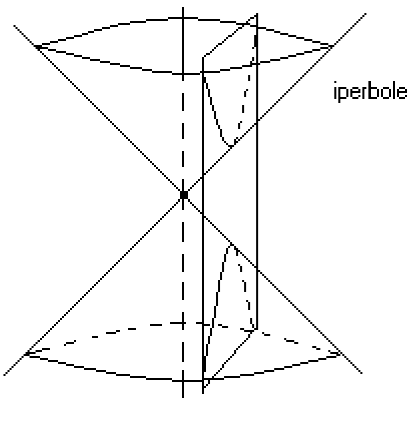
LA PARABOLA

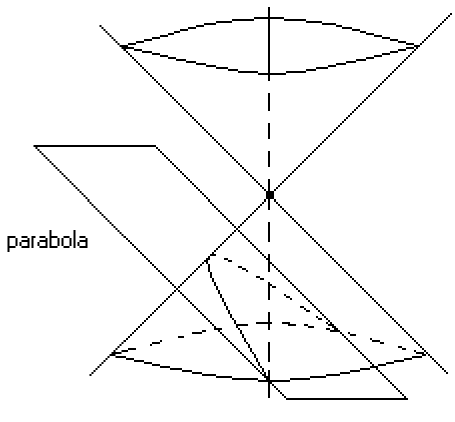
La **parabola** è una **curva** molto importante e dalle molteplici proprietà. Essa era conosciuta dai Greci (Apollonio ed Archimede II e III secolo a.C.). Apollonio per primo, in un famoso trattato, scoprì che la parabola fa parte di una classe più generale di curve : le **coniche**.
Le coniche si ottengono intersecando la superficie di un **cono** con un **piano**. Dal modo con cui si sceglie il piano, si ottengono i vari tipi di coniche (fra cui la parabole). Diamo qui una semplice e sintetica illustrazione grafica dei vari tipi di coniche, partendo da un cono generico di cui è indicata anche la "nomenclatura" relativa :





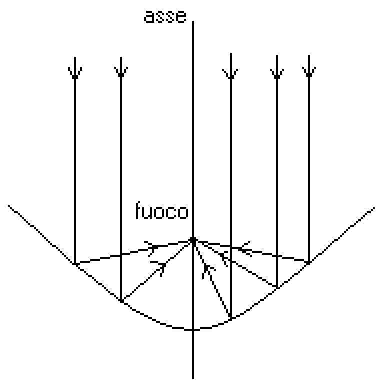






Come risulta evidente dai grafici, il caso della parabola si ottiene quando il piano che taglia il cono è **parallelo** ad una **generatrice** del cono.

La parabola, come dicevamo sopra, gode di importanti proprietà. Una di queste, per esempio, è utilizzata nella tecnologia radiotelevisiva per costruire le cosiddette **antenne paraboliche**.
Ogni parabola possiede un punto particolare, detto **fuoco**, che ha la proprietà per cui ogni raggio parallelo all'asse della parabola, "riflettendo" su essa, vi si congiunge :



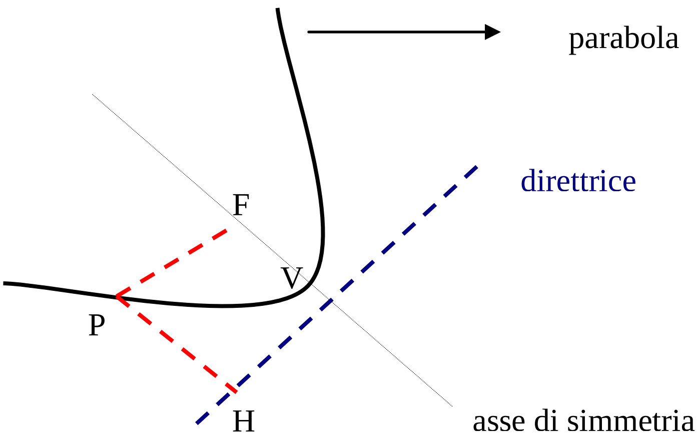
In questo modo, le onde elettromagnetiche (anche la luce) riflettendo all'interno di un'antenna parabolica vengono tutte concentrate nel fuoco della parabola in cui è posizionata la vera antenna (la parabola funge da semplice riflettore-concentratore) che si tratta di solito di un tratto di filo conduttore.
Al contrario, se poniamo un sorgente di radiazione elettromagnetica (per esempio una lampadina) nel fuoco di uno specchio parabolico otteniamo che i raggi diretti verso la superficie dello specchio vengono riflessi paralleli all'asse.

La parabola è anche definita matematicamente come luogo geometrico, cioè come insieme di punti aventi tutti una stessa proprietà.

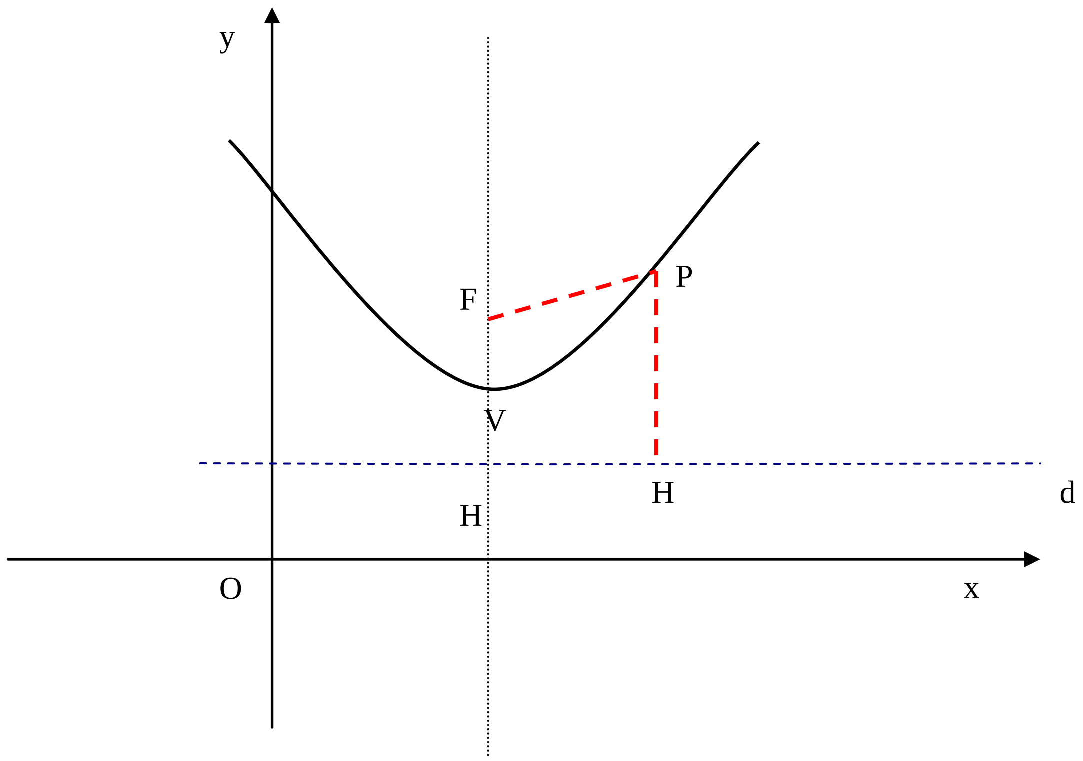
Definizione:

La Parabola è il Luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto Fuoco e da una retta fissa detta direttrice.

Fissati nel piano un punto F detto fuoco, ed una retta detta direttrice, la parabola sarà costituita da tutti i punti P del piano per i quali $\overline{PF} = \overline{PH}$, dove H rappresenta la proiezione ortogonale di P sulla direttrice.
La retta passante per il fuoco perpendicolare alla direttrice, rappresenta l'asse di simmetria della curva.
Il punto in cui l'asse di simmetria incontra la parabola si chiama Vertice della parabola. Esso è indicato con la lettera V.
La concavità della parabola è sempre rivolta verso il fuoco.



EQUAZIONE DELLA PARABOLA NEL PIANO CARTESIANO



Fissati nel piano cartesiano un punto fisso $F(p;q)$, detto fuoco, ed una retta fissa $y=d$ detta direttrice, un generico punto $P(x;y)$ del piano appartiene alla Parabola se e solo se $\overline{PF}=\overline{PH}$.
Applicando la formula della distanza tra due punti nel piano cartesiano, si ottiene:

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-d)^2}$$

elevando al quadrato e semplificando

$$x^2+p^2-2px+\cancel{y^2}+q^2-2qy=\cancel{y^2}+d^2-2dy$$
$$y(2q-2d)=x^2-2px+p^2+q^2-d^2$$
$$y=\frac{1}{2(q-d)}x^2+\frac{-\cancel{2}p}{\cancel{2}(q-d)}x+\frac{p^2+q^2-d^2}{2(q-d)}$$

ponendo $a=\dfrac{1}{2(q-d)}$

$b=\dfrac{-p}{q-d}$

$c=\dfrac{p^2+q^2-d^2}{2(q-d)}$

l'equazione diventa: $\boxed{y=ax^2+bx+c}$ che rappresenta, nel piano cartesiano, l'equazione canonica della parabola con l'asse parallelo all'asse delle y.

Dalle considerazioni fatte, impostando il sistema $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2(q-d)} \\ b = \dfrac{-p}{q-d} \\ c = \dfrac{p^2+q^2-d^2}{2(q-d)} \end{cases}$ e risolvendo rispetto a p, q, d

$$\begin{cases} q-d = \dfrac{1}{2a} \\ b = -p \cdot 2a \\ c = \dfrac{p^2+q^2-d^2}{\cancel{2}\dfrac{1}{\cancel{2}a}} \end{cases} \qquad \begin{cases} q-d = \dfrac{1}{2a} \\ p = -\dfrac{b}{2a} \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2}{4a^2} + q^2 - d^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} q = d + \dfrac{1}{2a} \\ p = -\dfrac{b}{2a} \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2}{4a^2} + \left(d + \dfrac{1}{2a}\right)^2 - d^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = d + \dfrac{1}{2a} \\ p = -\dfrac{b}{2a} \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2}{4a^2} + \cancel{d^2} + \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{d}{a} - \cancel{d^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} q = d + \dfrac{1}{2a} \\ p = -\dfrac{b}{2a} \\ \dfrac{4ac}{\cancel{4a^2}} = \dfrac{b^2+1+4ad}{\cancel{4a^2}} \end{cases} \text{ con } a \neq 0 \qquad \begin{cases} q = d + \dfrac{1}{2a} \\ p = -\dfrac{b}{2a} \\ d = \dfrac{4ac-b^2-1}{4a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = \dfrac{4ac-b^2-1}{4a} + \dfrac{1}{2a} \\ p = -\dfrac{b}{2a} \\ d = \dfrac{4ac-b^2-1}{4a} \end{cases} \qquad \begin{cases} q = \dfrac{4ac-b^2-1+2}{4a} \\ p = -\dfrac{b}{2a} \\ d = \dfrac{-1-\Delta}{4a} \end{cases} \text{ dove } \Delta = b^2-4ac \begin{cases} q = \dfrac{1-\Delta}{4a} \\ p = -\dfrac{b}{2a} \\ d = \dfrac{-1-\Delta}{4a} \end{cases}$$

Ricordando che $F(p;q)$ e che la direttrice ha equazione $y = d$, si avrà:

fuoco $\quad F\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$

direttrice $\quad y = \dfrac{-1-\Delta}{4a}$

L'asse di simmetria della parabola è la retta parallela all'asse y passante per il fuoco, pertanto ha equazione: $\quad x = \dfrac{-b}{2a}$

Indicato con K il punto in cui l'asse di simmetria della parabola incontra la direttrice sarà $K\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{-1-\Delta}{4a}\right)$

Il Vertice rappresenta il punto medio tra F e K, per cui sarà $V\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$

Formulario riassuntivo:

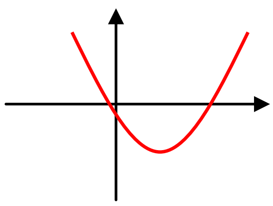
Equazione canonica	$y = ax^2 + bx + c$
Vertice	$V\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$
Fuoco	$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$
Asse di simmetria	$x = \frac{-b}{2a}$
Direttrice	$y = \frac{-1-\Delta}{4a}$

Proprietà della parabola in relazione ai coefficienti a, b, c

- $a \neq 0$ in ogni caso, infatti se fosse $a = 0$ l'equazione degenera in una retta
- $b = 0$ corrisponde al caso in cui l'asse ha equazione $x = 0$ e coincide con l'asse delle ordinate. Il vertice appartiene all'asse delle y
- $c = 0$ corrisponde al caso in cui la parabola passa per l'origine degli assi $O(0;0)$
- $b = 0 \vee c = 0$ corrisponde al caso in cui il Vertice $V(0;0)$ e quindi coincide con l'origine degli assi. L'equazione canonica della parabola diventa $\boxed{y = ax^2}$

Il coefficiente a è inoltre legato alla concavità della parabola.

- $a > 0 \longrightarrow \frac{1}{2(q-d)} > 0 \longrightarrow q > d \longrightarrow$ Il fuoco si trova sopra la direttrice e la parabola volge la concavità verso l'alto
- $a < 0 \longrightarrow \frac{1}{2(q-d)} < 0 \longrightarrow q < d \longrightarrow$ Il fuoco si trova sotto la direttrice e la parabola volge la concavità verso il basso

$a > 0$	Concavità verso l'alto	
$a < 0$	Concavità verso il basso